

УДК 517.95

**МНОГОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ**

М.А.КУЛИЕВ, А.М.ЭЛ-ХАДИДИ

Бакинский Государственный Университет
guliyevm.43@mail.ru, mahsoup79@yahoo.com

В работе с помощью обобщённого принципа сжатых отображений доказана теорема существования и единственности классического решения многомерной обратной краевой задачи для системы гиперболических уравнений в ограниченной области.

Ключевые слова: обратная краевая задача, классическое решение, обобщённый принцип сжатых отображений, существование и единственность

В работе исследуется классическое решение многомерной обратной краевой задачи для системы гиперболических уравнений в ограниченной области. Предполагается, что неизвестные коэффициенты зависят от аргумента t . А именно, рассматривается задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - Au(x,t) &= \\ &= a_1(t)b(x,t)u(x,t) + c_1(t)d(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + f_1(t)F(x,t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - Av(x,t) &= a_2(t)\tilde{b}(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \\ &+ c_2(t)\tilde{d}(x,t)v(x,t) + f_2(t)G(x,t), \\ (x,t) &\in \bar{D}_T = \bar{\Omega} \times [0, T], \end{aligned} \quad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (3)$$

$$v(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \tilde{\psi}(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (4)$$

$$u(x,t)|_{\Gamma_T} = 0, \quad v(x,t)|_{\Gamma_T} = 0, \quad \Gamma_T \equiv S \times [0, T], \quad (5)$$

$$u(x^i, t) = h_i(t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

$$v(x^i, t) = q_i(t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

где $0 < T < +\infty$; Ω - произвольная ограниченная n -мерная область, $n \leq 4$, S - граница области Ω , Γ_T - боковая поверхность цилиндра $D_T \equiv \Omega \times (0, T)$, x^i ($i = 1, 2, 3$) - различные фиксированные точки из Ω , а оператор L имеет вид:

$$Au(x,t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} \right) - K(x)u(x,t), \quad (8)$$

причём всюду на $\bar{\Omega}$ функции $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $K(x) \geq 0$ - измеримы, ограничены и в Ω $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2$, $\mu = const > 0$, ξ_i ($i = \overline{1, n}$) - любые

действительные числа; функции $b(x,t)$, $\tilde{b}(x,t)$, $d(x,t)$, $\tilde{d}(x,t)$, $F(x,t)$, $G(x,t)$, $\varphi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\psi(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, $h_i(t)$ и $q_i(t)$ ($i = \overline{1, 3}$) - заданные, а $u(x,t)$, $v(x,t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ - искомые.

Определение. Систему $\{u(x,t), v(x,t), a_1(t), a_2(t), c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t)\}$ назовём классическим решением задачи (1)-(7), если выполняются следующие условия:

1. Функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемы в \bar{D}_T .
2. Функции $a_1(t)$, $a_2(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны на $[0, T]$.
3. Все условия (1)-(7) удовлетворяются в обычном смысле.

С целью исследования задачи (1)-(7) рассмотрим следующие пространства. Обозначим через $B_{2,T}^{k,k-1}$ совокупность всех функций $u(x,t)$

вида $u(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} u_s(t) \mu_s(x)$ с непрерывно дифференцируемыми на $[0, T]$

$u_s(t)$ ($s = 1, 2, \dots$), таких, что

$$\left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \left(\lambda_s^k \max_{0 \leq t \leq T} |u_s(t)| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \left(\lambda_s^{k-1} \max_{0 \leq t \leq T} |u'_s(t)| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \equiv R_T(u) < +\infty,$$

здесь $k \geq 1$, $0 > -\lambda_1^2 \geq -\lambda_2^2 \geq \dots$ и $\mu_s(x)$ ($s = 1, 2, \dots$) - собственные значения и соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ обобщённые собственные функции первой однородной краевой задачи для оператора A в Ω . Нормы в этом множестве определим так: $\|u\| = R_T(u)$. Известно [3], что все эти пространства банаховы.

Предположим, что функции $a_{ij}(x)$ ($i, j = \overline{1, n}$), $K(x)$, $b(x, t)$, $\tilde{b}(x, t)$, $d(x, t)$, $\tilde{d}(x, t)$, $F(x, t)$, $G(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, $h_i(t)$ и $q_i(t)$ ($i = \overline{1, 3}$) удовлетворяют следующим условиям:

1. Функция $a_{ij}(x)$ ($i, j = \overline{1, n}$) $\left[\frac{n}{2} \right] + 3$ раза, а функция $K(x) \geq 0$ $\left[\frac{n}{2} \right] + 2$ раза непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$.
2. Область Ω является нормальной [2] и $S \in C^{\left[\frac{n}{2} \right] + 4}$.
3. Собственные функции $\mu_k(x)$ оператора A при граничном условии $\mu_k(x)|_S = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) $\left[\frac{n}{2} \right] + 4$ раза непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$.
4. Функция $\varphi(x) \in W_2^{\left[\frac{n}{2} \right] + 4}(\Omega)$, $\varphi(x)|_S = A \varphi(x)|_S = \dots = A^{\left[\frac{n+2}{4} \right] + 1} \varphi(x)|_S = 0$;
 $\tilde{\varphi}(x) \in W_2^{\left[\frac{n}{2} \right] + 4}(\Omega)$, $\tilde{\varphi}(x)|_S = A \tilde{\varphi}(x)|_S = \dots = A^{\left[\frac{n+2}{4} \right] + 1} \tilde{\varphi}(x)|_S = 0$;
 $\psi(x) \in W_2^{\left[\frac{n}{2} \right] + 3}(\Omega)$, $\psi(x)|_S = A \psi(x)|_S = \dots = A^{\left[\frac{n}{4} \right] + 1} \psi(x)|_S = 0$;
 $\tilde{\psi}(x) \in W_2^{\left[\frac{n}{2} \right] + 3}(\Omega)$, $\tilde{\psi}(x)|_S = A \tilde{\psi}(x)|_S = \dots = A^{\left[\frac{n}{4} \right] + 1} \tilde{\psi}(x)|_S = 0$.
5. Функции $\frac{\partial^i b(x, t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\frac{\partial^i \tilde{b}(x, t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\frac{\partial^i d(x, t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\frac{\partial^i \tilde{d}(x, t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ $\left(i = 1, \left[\frac{n}{2} \right] + 3 \right)$ принадлежат пространству $C(\overline{D}_T)$ и $\frac{\partial^i b(x, t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = 0$, $\frac{\partial^i \tilde{b}(x, t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = 0$,
 $\frac{\partial^j d(x, t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = 0$, $\frac{\partial^j \tilde{d}(x, t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = 0$ $\left(t \in [0, T], x \in S; j = 0, 2 \left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right)$.

6. Функции $F(x, t)$, $G(x, t)$ принадлежат пространству $W_{x,t,2}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,0}(D_T)$ и

$$\begin{aligned} F(x, t)|_{\Gamma_T} = AF(x, t)|_{\Gamma_T} = \dots = A^{\left[\frac{n}{4}\right]+1} F(x, t)|_{\Gamma_T} &= 0; \\ G(x, t)|_{\Gamma_T} = AG(x, t)|_{\Gamma_T} = \dots = A^{\left[\frac{n}{4}\right]+1} G(x, t)|_{\Gamma_T} &= 0. \end{aligned}$$

7. Функции $h_i(t) \neq 0$, $g_i(t) \neq 0$ ($i = \overline{1,3}$) дважды непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$ и $h_i(0) = \varphi(x^i)$, $h'_i(0) = \psi(x^i)$, $g_i(0) = \tilde{\varphi}(x^i)$, $g'_i(0) = \tilde{\psi}(x^i)$ ($i = \overline{1,3}$).

$$\begin{aligned} 8. \quad \Delta(t) &= \begin{vmatrix} b(x^1, t)h_1(t) & d(x^1, t)g'_1(t) & F(x^1, t) \\ b(x^2, t)h_2(t) & d(x^2, t)g'_2(t) & F(x^2, t) \\ b(x^3, t)h_3(t) & d(x^3, t)g'_3(t) & F(x^3, t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in [0, T], \\ \tilde{\Delta}(t) &= \begin{vmatrix} \tilde{b}(x^1, t)h'_1(t) & \tilde{d}(x^1, t)g_1(t) & G(x^1, t) \\ \tilde{b}(x^2, t)h'_2(t) & \tilde{d}(x^2, t)g_2(t) & G(x^2, t) \\ \tilde{b}(x^3, t)h'_3(t) & \tilde{d}(x^3, t)g_3(t) & G(x^3, t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

При выполнении условий 1-8, применяя метод Фурье и учитывая условия 6 и 7, решение задачи (1)-(7) сводим к решению следующей системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cos \lambda_k t \mu_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_k}{\lambda_k} \sin \lambda_k t \mu_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t \int_{\Omega} [a_1(\tau) b(\xi, \tau) u(\xi, \tau) + \\ + c_1(\tau) d(\xi, \tau) \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, \tau) + f_1(\tau) F(\xi, \tau)] \sin \lambda_k(t - \tau) \mu_k(\xi) d\xi d\tau \cdot \mu_k(x), \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k \cos \lambda_k t \mu_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Psi}_k}{\lambda_k} \sin \lambda_k t \mu_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t \int_{\Omega} [a_2(\tau) \tilde{b}(\xi, \tau) \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, \tau) + \\ + c_2(\tau) \tilde{d}(\xi, \tau) v(\xi, \tau) + f_2(\tau) G(\xi, \tau)] \sin \lambda_k(t - \tau) \mu_k(\xi) d\xi d\tau \cdot \mu_k(x), \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \sum_{i=1}^3 A_{i1} \Phi_i(u, v, a_1, c_1, f_1; t), \\ c_1(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \sum_{i=1}^3 A_{i2} \Phi_i(u, v, a_1, c_1, f_1; t), \\ f_1(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \sum_{i=1}^3 A_{i3} \Phi_i(u, v, a_1, c_1, f_1; t); \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} a_2(t) = \frac{1}{\tilde{\Delta}(t)} \sum_{i=1}^3 \tilde{A}_{i1} \tilde{\Phi}_i(u, v, a_2, c_2, f_2; t), \\ c_2(t) = \frac{1}{\tilde{\Delta}(t)} \sum_{i=1}^3 \tilde{A}_{i2} \tilde{\Phi}_i(u, v, a_2, c_2, f_2; t), \\ f_2(t) = \frac{1}{\tilde{\Delta}(t)} \sum_{i=1}^3 \tilde{A}_{i3} \tilde{\Phi}_i(u, v, a_2, c_2, f_2; t), \end{cases} \quad (12)$$

где $\Phi_i(u, v, a_1, c_1, f_1; t) = h_i''(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k \cos \lambda_k t \mu_k(x^i) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k \sin \lambda_k t \mu_k(x^i) +$
 $+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\Omega} \lambda_k [a_1(\tau) b(\xi, \tau) u(\xi, \tau) + c_1(\tau) d(\xi, \tau) \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, \tau) + f_1(\tau) F(\xi, \tau)] \times$
 $\times \sin \lambda_k(t - \tau) \mu_k(\xi) d\xi d\tau \cdot \mu_k(x^i) \quad (i = \overline{1, 3}),$
 $\tilde{\Phi}_i(u, v, a_2, c_2, f_2; t) = g_i''(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \tilde{\varphi}_k \cos \lambda_k t \mu_k(x^i) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \tilde{\psi}_k \sin \lambda_k t \mu_k(x^i) +$
 $+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\Omega} \lambda_k [a_2(\tau) \tilde{b}(\xi, \tau) \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, \tau) + c_2(\tau) \tilde{d}(\xi, \tau) v(\xi, \tau) + f_2(\tau) G(\xi, \tau)] \times$
 $\times \sin \lambda_k(t - \tau) \mu_k(\xi) d\xi d\tau \cdot \mu_k(x^i) \quad (i = \overline{1, 3}),$

$A_{ij}(t)$ - алгебраическое дополнение элемента b_{ij} определителя $\Delta(t)$,

$\tilde{A}_{ij}(t)$ - алгебраическое дополнение элемента \tilde{b}_{ij} определителя $\tilde{\Delta}(t)$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть выполнены условия 1-8. Тогда при достаточно малых значениях T задача (1)-(7) имеет единственное классическое решение в некотором шаре, определяемом ниже пространства

$$E_T = \left(B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2} \right] + 4, \left[\frac{n}{2} \right] + 3} \right)^2 \times (C[0, T])^6.$$

Доказательство. Запишем систему (9)-(12) в виде

$$Z = LZ, \quad (13)$$

где $Z = \{u(x, t), v(x, t), a_1(t), a_2(t), c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t)\},$

$$LZ = (L_1(z), L_2(z), L_3(z), L_4(z), L_5(z), L_6(z), L_7(z), L_8(z)),$$

причём компоненты $L_i(z)$ ($i = \overline{1, 8}$) оператора LZ равны правым частям уравнений (9)-(12), соответственно. Ищем неподвижную точку оператора L в пространстве E_T , причём норму в E_T определим так:

$$\|(u, v, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)\|_{E_T} = \|u\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2} \right] + 4, \left[\frac{n}{2} \right] + 3}} + \|v\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2} \right] + 4, \left[\frac{n}{2} \right] + 3}} + \sum_{i=1}^6 \|a_i\|_{C[0, T]}.$$

Рассмотрим оператор $L(u, v, a_1, a_2, c_1, c_2, f_1, f_2)$ в шаре K_R ($\|z\|_{E_T} \leq R$) пространства E_T , где

$$\begin{aligned}
& C \left(\|\varphi\|_{W_2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 4}(\Omega)} + \|\psi\|_{W_2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 3}(\Omega)} + \|\tilde{\varphi}\|_{W_2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 4}(\Omega)} + \|\tilde{\psi}\|_{W_2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 3}(\Omega)} \right) + \\
& + \left(\min_{0 \leq t \leq T} |\Delta(t)| \right)^{-1} \cdot \sum_{i,j=1}^3 \|A_{ij}(t)\|_{C[0,T]} \left[\|h_i''(t)\|_{C[0,T]} + C \left(\|\varphi\|_{W_2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 4}(\Omega)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \|\psi\|_{W_2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 3}(\Omega)} \right) \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda \left[\frac{n}{2} \right] + 2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] + \left(\min_{0 \leq t \leq T} |\tilde{\Delta}(t)| \right)^{-1} \cdot \sum_{i,j=1}^3 \|\tilde{A}_{ij}(t)\|_{C[0,T]} \left[\|g_i'(t)\|_{C[0,T]} + \right. \\
& \left. + C \left(\|\tilde{\varphi}\|_{W_2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 4}(\Omega)} + \|\tilde{\psi}\|_{W_2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 3}(\Omega)} \right) \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda \left[\frac{n}{2} \right] + 2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \equiv M < R, \tag{14}
\end{aligned}$$

где $C > 0$ - некоторая постоянная.

Пользуясь условиями 5-8 теоремы и тем, что в Ω $\mu_s(x) = -\frac{1}{\lambda_s^2} \Delta \mu_s(x)$,

для любого $(u, v, a_1, a_2, c_1, c_2, f_1, f_2) \in K_R$ имеем:

$$\begin{aligned}
\|L(u, v, a_1, a_2, c_1, c_2, f_1, f_2)\|_{E_T} & \leq \|W_1(x, t)\|_{B_{\frac{n}{2}, T}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 4, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 3}} + \|W_5(x, t)\|_{B_{\frac{n}{2}, T}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 4, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 3}} + \\
& + \sum_{i=2}^4 \|W_i(x, t)\|_{C[0,T]} + \sum_{i=6}^8 \|W_i(x, t)\|_{C[0,T]} + \sqrt{T} \left[q_1 + q_2 \sum_{i,j=1}^3 \left(\|A_{ij}(t)\|_{C[0,T]} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \|\tilde{A}_{ij}(t)\|_{C[0,T]} \right) \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda \left[\frac{n}{2} \right] + 2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \cdot \left[\|Q(u(x, t), v(x, t), a_1(t), c_1(t), f_1(t))\|_{W_{x, T, 2}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 3, 0}(D_T)} + \right. \\
& \left. + \|\tilde{Q}(u(x, t), v(x, t), a_2(t), c_2(t), f_2(t))\|_{W_{x, T, 2}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 3, 0}(D_T)} \right], \tag{15}
\end{aligned}$$

где $q_1 > 0, q_2 > 0$ - некоторые постоянные и

$$W_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cos \lambda_k t \cdot \mu_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_k}{\lambda_k} \sin \lambda_k t \cdot \mu_k(x), \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
W_{i+1}(x, t) & = \frac{1}{\Delta(t)} \sum_{j=1}^3 A_{ji}(t) \left[h_j''(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\lambda_k \varphi_k \cos \lambda_k t + \right. \\
& \left. + \psi_k \sin \lambda_k t) \mu_k(x^i) \right] \quad (i = \overline{1, 3}), \tag{17}
\end{aligned}$$

$$W_5(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k \cos \lambda_k t \cdot \mu_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_k}{\lambda_k} \sin \lambda_k t \cdot \mu_k(x), \quad (18)$$

$$W_{i+5}(x, t) = \frac{1}{\tilde{\Delta}(t)} \sum_{j=1}^3 \tilde{A}_{ji}(t) \left[g_i''(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\lambda_k \tilde{\varphi}_k \cos \lambda_k t + \tilde{\psi}_k \sin \lambda_k t) \mu_k(x^i) \right] \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (19)$$

$$Q(u(x, t), v(x, t), a_1(t), c_1(t), f_1(t)) = a_1(t)b(x, t)u(x, t) + c_1(t)d(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + f_1(t)F(x, t), \quad (20)$$

$$\tilde{Q}(u(x, t), v(x, t), a_2(t), c_2(t), f_2(t)) = a_2(t)\tilde{b}(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c_2(t)\tilde{d}(x, t)v(x, t) + f_2(t)G(x, t). \quad (21)$$

Пользуясь теоремами вложения С.Л.Соболева и структурой пространства $B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+4, \left[\frac{n}{2}\right]+3}$ для любых $u, v \in B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+4, \left[\frac{n}{2}\right]+3}$ и $t \in [0, T]$, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^i u(x, t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L_2(\Omega)} &\leq q_3 \|u\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+4, \left[\frac{n}{2}\right]+3}} \quad \left(i = 0, \left[\frac{n}{2} \right] + 4 \right), \\ \left\| \frac{\partial^i v(x, t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L_2(\Omega)} &\leq q_4 \|v\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+4, \left[\frac{n}{2}\right]+3}} \quad \left(i = 0, \left[\frac{n}{2} \right] + 4 \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где $q_3 > 0, q_4 > 0$ - некоторые постоянные, не зависящие от u, v, t .

Тогда, с учётом оценки (22), из (15) получаем, что $\forall u, v, a_1, a_2, c_1, c_2, f_1, f_2 \in K_R$:

$$\begin{aligned} \|L(u, v, a_1, a_2, c_1, c_2, f_1, f_2)\|_{E_T} &\leq \|W_1(x, t)\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+4, \left[\frac{n}{2}\right]+3}} + \|W_5(x, t)\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+4, \left[\frac{n}{2}\right]+3}} + \\ &+ \sum_{i=2}^4 \|W_i(x, t)\|_{C[0, T]} + \sum_{i=6}^8 \|W_i(x, t)\|_{C[0, T]} + \\ &+ TK_1 \cdot M_1 \cdot \left(\|a_1\|_{C[0, T]} \cdot \|u\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+4, \left[\frac{n}{2}\right]+3}} + \right. \\ &+ \|c_1\|_{C[0, T]} \cdot \|v\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+4, \left[\frac{n}{2}\right]+3}} + \|f_1\|_{C[0, T]} + \\ &\left. + \|a_2\|_{C[0, T]} \cdot \|u\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+4, \left[\frac{n}{2}\right]+3}} + \|c_2\|_{C[0, T]} \cdot \|v\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+4, \left[\frac{n}{2}\right]+3}} + \|f_2\|_{C[0, T]} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{где } K_1 = q_1 + q_2 \sum_{i,j=1}^3 \left(\|A_{ij}(t)\|_{C[0, T]} + \|\tilde{A}_{ij}(t)\|_{C[0, T]} \right) \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_s^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$M_1 > 0$ - некоторое число.

Из последнего имеем

$$\|L(u, v, a_1, a_2, c_1, c_2, f_1, f_2)\|_{E_T} \leq M + TK_1 M_1 2(2R^2 + R). \quad (23_1)$$

Так как $M < R$, то из оценки (23₁) следует, что при достаточно малом $T > 0$ выполнено $\|L(u, v, a_1, a_2, c_1, c_2, f_1, f_2)\|_{E_T} \leq R$, то есть оператор L отображает шар K_R в себя.

Покажем, что некоторая итерация оператора L является сжимающим оператором. Рассмотрим два произвольных элемента W и \tilde{W} из шара K_R . Построим их образы с помощью последовательных итераций оператора L .

Тогда имеем

$$W_0 = W, W_1 = L(W_0), \dots, W_k = L(W_{k-1}), \dots$$

и

$$\tilde{W}_0 = \tilde{W}, \tilde{W}_1 = L(\tilde{W}_0), \dots, \tilde{W}_k = L(\tilde{W}_{k-1}), \dots,$$

где $W_k = \{u_k, v_k, a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, f_1^{(k)}, f_2^{(k)}\}$,

$$\tilde{W}_k = \{\tilde{u}_k, \tilde{v}_k, \tilde{a}_1^{(k)}, \tilde{a}_2^{(k)}, \tilde{c}_1^{(k)}, \tilde{c}_2^{(k)}, \tilde{f}_1^{(k)}, \tilde{f}_2^{(k)}\},$$

$$u_0 = u, v_0 = v, a_1^{(0)} = a_1, a_2^{(0)} = a_2, c_1^{(0)} = c_1, c_2^{(0)} = c_2, f_1^{(0)} = f_1, f_2^{(0)} = f_2,$$

$$\tilde{u}_0 = \tilde{u}, \tilde{v}_0 = \tilde{v}, \tilde{a}_1^{(0)} = \tilde{a}_1, \tilde{a}_2^{(0)} = \tilde{a}_2, \tilde{c}_1^{(0)} = \tilde{c}_1, \tilde{c}_2^{(0)} = \tilde{c}_2, \tilde{f}_1^{(0)} = \tilde{f}_1, \tilde{f}_2^{(0)} = \tilde{f}_2.$$

Тогда из системы (9)-(12) при условиях теоремы $\forall t \in [0, T]$ имеем:

$$\|W_k - \tilde{W}_k\|_t^2 \leq K \int_0^t \|W_{k-1} - \tilde{W}_{k-1}\|_\tau^2 d\tau, \quad (24)$$

где $\|W_k - \tilde{W}_k\|_t^2 = \|u_k(\xi, \tau) - \tilde{u}_k(\xi, \tau)\|_{B_{\frac{1}{2}, t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+4\left[\frac{n}{2}\right]+3}}^2 + \|v_k(\xi, \tau) - \tilde{v}_k(\xi, \tau)\|_{B_{\frac{1}{2}, t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+4\left[\frac{n}{2}\right]+3}}^2 +$

$$+ \|a_1^{(k)}(\tau) - \tilde{a}_1^{(k)}(\tau)\|_{C[0, t]}^2 + \|a_2^{(k)}(\tau) - \tilde{a}_2^{(k)}(\tau)\|_{C[0, t]}^2 + \|c_1^{(k)}(\tau) - \tilde{c}_1^{(k)}(\tau)\|_{C[0, t]}^2 +$$

$$+ \|c_2^{(k)}(\tau) - \tilde{c}_2^{(k)}(\tau)\|_{C[0, t]}^2 + \|f_1^{(k)}(\tau) - \tilde{f}_1^{(k)}(\tau)\|_{C[0, t]}^2 + \|f_2^{(k)}(\tau) - \tilde{f}_2^{(k)}(\tau)\|_{C[0, t]}^2,$$

$$K = \left[2 + \sum_{i=2}^4 (K_i + \tilde{K}_i) \right] q_{13},$$

$$K_i = \left(\min_{0 \leq t \leq T} |\Delta(t)| \right)^{-2} \cdot 3 \cdot \sum_{j=1}^3 \|A_{ij}(t)\|_{C[0, T]}^2 \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_s(X^i)}{\lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}} \right)^2 \quad (i = \overline{2, 4}),$$

$$\tilde{K}_i = \left(\min_{0 \leq t \leq T} |\tilde{\Delta}(t)| \right)^{-2} \cdot 3 \cdot \sum_{j=1}^3 \|\tilde{A}_{ij}(t)\|_{C[0,T]}^2 \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda \left[\frac{n}{2} \right]^{+2}} \right)^2 \quad (i = \overline{2,4}),$$

$q_{13} > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от $u, v, a_1, a_2, c_1, c_2, f_1, f_2$.

Тогда по индукции нетрудно получить оценку

$$\|W_k - \tilde{W}_k\|_{E_T} \leq \left\{ \frac{(KT)^k}{k!} \right\}^{\frac{1}{2}} \|W_0 - \tilde{W}_0\|_{E_T}. \quad (25)$$

Таким образом, итерация L^k оператора L удовлетворяет неравенству

$$\|L^k W - L^k \tilde{W}\|_{E_T} \leq \left\{ \frac{(KT)^k}{k!} \right\}^{\frac{1}{2}} \|W - \tilde{W}\|_{E_T}. \quad (26)$$

Ясно, что при достаточно больших значениях k

$$\left\{ \frac{(KT)^k}{k!} \right\}^{\frac{1}{2}} < 1. \quad (27)$$

А это означает, что для таких k , существующая итерация L^k , является сжимающей. Следовательно, при достаточно малых значениях T оператор L^k удовлетворяет на множестве K_R условию принципа сжатых отображений. Тогда единственная в K_R неподвижная точка W оператора L^k является и единственной в K_R неподвижной точкой для оператора L .

Таким образом, оператор L имеет в K_R единственную неподвижную точку $(u(x,t), v(x,t), a_1(t), a_2(t), c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t))$.

Тогда функции

$$u(x,t) \in B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2} \right]^{+4}, \left[\frac{n}{2} \right]^{+3}}, v(x,t) \in B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2} \right]^{+4}, \left[\frac{n}{2} \right]^{+3}}, a_1(t), a_2(t), c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t)$$

удовлетворяют на $[0, T]$ системе (9)-(12).

Легко показать, что $(u(x,t), v(x,t), a_1(t), a_2(t), c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t))$ является классическим решением задачи (1)-(7), единственным в шаре $K_R \subset E_T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1967, 150 с.

- Ильин В.А., Шишмарев И.А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Известия АН СССР, серия математики, 1960, 24, с.883-896.
- Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. – Дисс.док.физ.-мат.наук, 1973 г., АГУ, 319 с.
- Кулиев М.А. Многомерная обратная краевая задача для линейного гиперболического уравнения в ограниченной области // Дифференциальные уравнения, 2002, т.38, №1, с.98-101.
- Кулиев М.А. Многомерная обратная краевая задача для систем линейных гиперболических уравнений в ограниченной области // Вестник Бакинского университета, серия физико-математических наук, 2007, №2, с.5-15.

MƏHDUD OBLASTDA ÇOXÖLÇÜLÜ HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

M.Ə.QULİYEV, Ə.M.EL-HADİDİ

XÜLASƏ

İşdə ümumiləşmiş sıxılmış inikas prinsipinin köməylə məhdud oblastda çoxölçülü hiperbolik tənliklər sistemi üçün tərs sərhəd məsələsinin klassik həllinin varlıq və yeganəliyi tədqiq olunmuşdur.

Açar sözlər: tərs sərhəd məsələsi, klassik həll, ümumiləşmiş sıxılmış inikas prinsipi, varlıq və yeganəlik.

MULTIDIMENSIONAL INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF HYPERBOLIC EQUATIONS IN BOUNDED DOMAIN

M.A.GULIYEV, A.M.EL-HADIDI

SUMMARY

In this paper, by using the generalized principal of compressed mapping, we investigate the theorem of the uniqueness and existence of the classical solution of multidimensional inverse boundary value problem for the system of hyperbolic equations in bounded domain.

Key words: inverse boundary value problem, classical solution, generalized principal of compressed mapping, uniqueness and existence.

Поступила в редакцию: 05.03.2011г.

Принято к печати: 17.06.2011 г.